

नामांक				Roll No.		

No. of Questions — 24

No. of Printed Pages — 7

SS—15-1—Maths. I

उच्च माध्यमिक परीक्षा, 2010

SENIOR SECONDARY EXAMINATION, 2010

वैकल्पिक वर्ग I तथा II — कला व विज्ञान वर्ग

(OPTIONAL GROUPS I & II — HUMANITIES AND SCIENCE)

गणित — प्रथम पत्र

(MATHEMATICS — First Paper)

समय : 3 $\frac{1}{4}$ घण्टे

पूर्णांक : 60

परीक्षार्थियों के लिए आवश्यक निर्देश :

GENERAL INSTRUCTIONS FOR EXAMINEES :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें ।
Candidate must write first his / her Roll No. on the question paper compulsorily.
2. प्रश्न पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तर में किसी प्रकार की त्रुटि / अन्तर / विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को सही मानें ।
If there is any error / difference / contradiction in Hindi and English versions of the Question paper, the question of Hindi version should be treated valid.
3. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं । प्रश्न क्रमांक **21, 23 व 24** में आन्तरिक विकल्प हैं ।
All questions are compulsory. Question Nos. **21, 23 and 24** have internal choice.
4. प्रश्न क्रमांक **2** से **7** तक अति लघूत्तरात्मक प्रश्न हैं ।
Question Nos. **2 to 7** are Very Short Answer type.
5. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें ।
Write the answer of each question in answer-book only.

6. जिस प्रश्न के एक से अधिक समान अंक वाले भाग हैं, उन सभी भागों का हल एक साथ सतत् लिखें ।

For questions having more than one part carrying similar marks, the answers of those parts are to be written together in continuity.

7. अपनी उत्तर-पुस्तिका के पृष्ठों के दोनों ओर लिखिए । यदि कोई रफ़ कार्य करना हो, तो उत्तर-पुस्तिका के अंतिम पृष्ठों पर करें और इन्हें तिरछी लाइनों से काटकर उन पर 'रफ़ कार्य' लिख दें ।

Write on both sides of the pages of your answer-book. If any rough work is to be done, do it on last pages of the answer-book and cross with slant lines and write 'Rough Work' on them.

8. प्रश्न क्रमांक 1 के चार भाग (i, ii, iii तथा iv) हैं । प्रत्येक भाग के उत्तर के चार विकल्प (क, ख, ग एवं घ) हैं । सही विकल्प का उत्तराक्षर उत्तर-पुस्तिका में निम्नानुसार तालिका बनाकर लिखें :

There are *four* parts (i, ii, iii and iv) in Question No. 1. Each part has *four* alternatives A, B, C and D. Write the letter of the correct alternative in the answer-book at a place by making a table as mentioned below :

प्रश्न क्रमांक Question No.	सही उत्तर का क्रमाक्षर Correct letter of the Answer
1. (i)	
1. (ii)	
1. (iii)	
1. (iv)	

1. (i) बिन्दु $P (1, 2, 3)$ से xy समतल पर लम्ब PM डाला गया । लम्बपाद M के निर्देशांक हैं

(क) $(1, 2, 3)$

(ख) $(0, 2, 3)$

(ग) $(1, 0, 3)$

(घ) $(1, 2, 0)$.

A perpendicular PM is drawn from the point $P (1, 2, 3)$ on xy plane. The coordinates of the foot of perpendicular M are

(A) $(1, 2, 3)$

(B) $(0, 2, 3)$

(C) $(1, 0, 3)$

(D) $(1, 2, 0)$.

$\frac{1}{2}$

(ii) समतल $x = 0$ की बिन्दु $(3, 4, 6)$ से दूरी है

- (क) 3 (ख) 4
(ग) 6 (घ) $\sqrt{61}$.

Distance of the plane $x = 0$ from the point $(3, 4, 6)$ is

- (A) 3 (B) 4
(C) 6 (D) $\sqrt{61}$. $\frac{1}{2}$

(iii) एक कण प्रारंभिक वेग g मी/से से ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर फेंका जाता है । कण द्वारा तय की गई महत्तम ऊँचाई है

- (क) $\frac{g}{4}$ मीटर (ख) $\frac{g}{2}$ मीटर
(ग) g मीटर (घ) $2g$ मीटर ।

A particle is projected vertically upwards with initial velocity g m/sec. The maximum height attained by the particle is

- (A) $\frac{g}{4}$ m (B) $\frac{g}{2}$ m
(C) g m (D) $2g$ m. $\frac{1}{2}$

(iv) 500 ग्राम द्रव्यमान के एक पिण्ड पर एक बल लगाने पर 3 मी/से² का त्वरण उत्पन्न हो जाता है, तो लगने वाला बल है

- (क) 1 N (ख) 1.5 N
(ग) 2 N (घ) 3 N.

A force acting on a body of mass 500 gms, produces an acceleration of 3 m/sec² . Then the impressed force is

- (A) 1 N (B) 1.5 N
(C) 2 N (D) 3 N. $\frac{1}{2}$

2. सिद्ध कीजिए कि $2 \cos^{-1} x = \cos^{-1} (2x^2 - 1)$.

Prove that $2 \cos^{-1} x = \cos^{-1} (2x^2 - 1)$. 1

3. बिन्दुओं $P(1, 5, 0)$ तथा $Q(2, 3, 2)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्कोज्याएं ज्ञात कीजिए ।

Find the direction cosines of the line joining the points $P(1, 5, 0)$ and $Q(2, 3, 2)$. 1

4. बिन्दु (a, b, c) से गुजरने वाली तथा z -अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the equation of a line passing through the point (a, b, c) and parallel to z -axis. 1

5. किसी भी बूलीय बीजगणित में सिद्ध कीजिए कि $a + a = a$.
In any Boolean algebra, prove that $a + a = a$. 1
6. सदिशों $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ के लम्बवत् इकाई सदिश ज्ञात कीजिए ।
Find unit vector perpendicular to the vectors $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ and $2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$. 1
7. एक गुब्बारा 40 मी / से के वेग से ऊपर की ओर बढ़ रहा है । उसमें से एक गेंद को गिराया जाता है । गेंद धरातल तक पहुँचने में 10 से लगाती है । गेंद गिरते समय गुब्बारे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।
A balloon is ascending with a velocity of 40 m/sec. A ball is dropped from the balloon. The ball takes 10 sec to reach the ground. Find the height of the balloon when the ball was dropped. 1
8. समुच्चय $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ से समुच्चय $B = \{ 1, 2, 3 \}$ में परिभाषित सम्बन्ध R को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में लिखिए, जहाँ $xRy \Leftrightarrow x = 2y$ । R^{-1} का प्रांत भी ज्ञात कीजिए ।
Express the relation R as a set of ordered pairs, defined from the set $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ to the set $B = \{ 1, 2, 3 \}$, where $xRy \Leftrightarrow x = 2y$. Also find the domain of R^{-1} 2
9. यदि $f(x) = \log_e \frac{1+x}{1-x}$ तथा $g(x) = \frac{3x+x^3}{1+3x^2}$ तब $(f \circ g)(x)$ का मान ज्ञात कीजिए ।
If $f(x) = \log_e \frac{1+x}{1-x}$ and $g(x) = \frac{3x+x^3}{1+3x^2}$, then find the value of $(f \circ g)(x)$. 2
10. यदि $(x + iy)^{1/3} = a + ib$, जहाँ $a, b, x, y \in R$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 4(a^2 - b^2)$.
If $(x + iy)^{1/3} = a + ib$, where $a, b, x, y \in R$, then prove that $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 4(a^2 - b^2)$. 2
11. यदि $\sin(\alpha + i\beta) = x + iy$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{x^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = 1$.
If $\sin(\alpha + i\beta) = x + iy$, then prove that $\frac{x^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = 1$. 2

12. बिन्दु $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ से होकर जाने वाले बल $3\hat{i} + \hat{k}$ का बिन्दु $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ के सापेक्ष आघूर्ण ज्ञात कीजिए ।

Find moment of the force $3\hat{i} + \hat{k}$ passing through the point $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ about the point $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$. 2

13. बिन्दुओं $A (3, 4, - 7)$ और $B (1, - 1, 6)$ से गुजरने वाली सरल रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the vector equation of the straight line passing through the points $A (3, 4, - 7)$ and $B (1, - 1, 6)$. 2

14. एक कण पर कार्यरत तीन समतलीय बल कण को साम्यावस्था में रखते हैं । प्रथम, द्वितीय एवं द्वितीय, तृतीय बलों के मध्य कोण क्रमशः 120° तथा 150° हैं, तो बलों के परिमाणों के अनुपात ज्ञात कीजिए ।

Three coplanar forces acting on a particle keep the particle in equilibrium. The angles between first, second and second, third forces are 120° and 150° respectively. Find the ratio of the magnitudes of the forces. 2

15. N प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है । यदि $N \times N$ पर कोई सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित हो कि $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ जहाँ $a, b, c, d \in N$, तो सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है ।

N is the set of natural numbers. If a relation R be defined on $N \times N$ such that $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$, where $a, b, c, d, \in N$. Then prove that R is an equivalence relation. 3

16. यदि फलन f और g दो ऐसे एकैकी आच्छादन हैं कि $g \circ f$ परिभाषित हो, तो सिद्ध कीजिए कि $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

If f and g are two bijections such that $g \circ f$ is defined, then prove that $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. 3

17. सिद्ध कीजिए कि दो सरल रेखाएँ, जिनकी दिक्कोज्याएँ समीकरणों $al + bm + cn = 0$ तथा $fmn + gnl + hlm = 0$ से प्राप्त होती हैं, समान्तर होंगी यदि $\sqrt{af} + \sqrt{bg} + \sqrt{ch} = 0$.

Prove that the two lines whose direction cosines are given by the equations $al + bm + cn = 0$ and $fmn + gnl + hlm = 0$ are parallel, if $\sqrt{af} + \sqrt{bg} + \sqrt{ch} = 0$. 3

18. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $A (-1, 4, -3)$, $B (3, 2, -5)$, $C (-3, 8, -5)$ तथा $D (-3, 2, 1)$ समतलीय हैं ।

Prove that the points $A (-1, 4, -3)$, $B (3, 2, -5)$, $C (-3, 8, -5)$ and $D (-3, 2, 1)$ are coplanar. 3

19. एक कण पर क्रियाशील दो बल $(P + Q)$ और $(P - Q)$ एक दूसरे से 2α कोण बनाते हैं और उनका परिणामी उनके मध्य कोण के अर्द्धक से θ कोण बनाता है । सिद्ध कीजिए कि $P \tan \theta = Q \tan \alpha$.

Two forces $(P + Q)$ and $(P - Q)$ act on a particle at an angle 2α with each other and their resultant makes an angle θ with the bisector of the angle between them. Prove that $P \tan \theta = Q \tan \alpha$. 3

20. u वेग से तैरने वाले व्यक्ति को v वेग से बहने वाली नदी में धारा के लम्बवत् दूरी को पार करने में t_1 समय लगता है । यदि धारा की दिशा में उतनी ही दूरी को तय करने में t_2 समय लगता है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$t_1 : t_2 = \sqrt{u + v} : \sqrt{u - v} .$$

A man swimming with speed u takes time t_1 in crossing the river, flowing with speed v , perpendicular to the stream. If he covers the same distance in time t_2 down the stream, then prove that

$$t_1 : t_2 = \sqrt{u + v} : \sqrt{u - v} . 3$$

21. यदि $x = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $y = \cos \beta + i \sin \beta$, $z = \cos \gamma + i \sin \gamma$ तथा $x + y + z = xyz$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\cos (\alpha - \beta) + \cos (\beta - \gamma) + \cos (\gamma - \alpha) = -1 .$$

अथवा

यदि $x = \cos \theta + i \sin \theta$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = i \tan n \theta .$$

If $x = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $y = \cos \beta + i \sin \beta$, $z = \cos \gamma + i \sin \gamma$ and $x + y + z = xyz$, then prove that

$$\cos (\alpha - \beta) + \cos (\beta - \gamma) + \cos (\gamma - \alpha) = -1 .$$

OR

If $x = \cos \theta + i \sin \theta$, then prove that

$$\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = i \tan n \theta . 5$$

22. मूल बिन्दु से नहीं गुजरने वाले उन दो समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (0, 4, - 3) तथा (6, - 4, 3) से गुजरते हैं तथा जिनके द्वारा अक्षों पर काटे गए अन्तःखण्डों का योगफल शून्य है ।

Find the equations of two planes passing through the points (0, 4, - 3) and (6, - 4, 3) and not passing through the origin, the sum of whose intercepts on the axes is zero. 5

23. तीन समदिश समान्तर बल P , Q एवं R एक त्रिभुज ABC के शीर्षों पर क्रियाशील हैं । सिद्ध कीजिए कि उनका परिणामी त्रिभुज के परिकेन्द्र से गुजरता है, यदि

$$\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C} .$$

अथवा

एक वर्ग $ABCD$ की भुजाओं AB , BC , CD और DA के अनुदिश क्रमशः P , $3P$, $2P$ तथा $5P$ बल लगे हैं । इनके परिणामी का परिमाण तथा दिशा ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि यह बढ़ी हुई AD को E पर मिलता है, जहाँ $AE : DE = 5 : 4$.

Three like parallel forces P , Q and R act at vertices of the triangle ABC . Prove that the resultant passes through the circumcentre of the triangle if

$$\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C} .$$

OR

Forces P , $3P$, $2P$ and $5P$ act along the sides AB , BC , CD and DA of a square $ABCD$. Find the magnitude and direction of the resultant and prove that it meets AD produced at point E such that $AE : DE = 5 : 4$. 5

24. एक ऊर्ध्वाधर मीनार की चोटी एवं पाद से क्रमशः α तथा β उन्नतांश पर दो गोलियाँ चलाई जाती हैं और वे किसी वस्तु पर एक साथ तथा एक ही बिन्दु पर जाकर लगती हैं । यदि उस वस्तु की मीनार से क्षैतिज दूरी a है, तो सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $a (\tan \beta - \tan \alpha)$ है ।

अथवा

एक कण u वेग से फेंका जाता है । यदि क्षैतिज धरातल पर इसका परास प्राप्त की गई महत्तम ऊँचाई का दुगुना है, तो सिद्ध कीजिए कि इसका परास $\frac{4u^2}{5g}$ होगा ।

Two bullets are fired from the top and bottom of a tower at elevations α and β respectively. They strike a body simultaneously and at the same point. If a be the horizontal distance of the body from the tower, prove that the height of the tower is $a (\tan \beta - \tan \alpha)$.

OR

A particle is projected with a velocity u . If its horizontal range is double of the greatest height attained by the particle, prove that the range is $\frac{4u^2}{5g}$. 5